

SKRIVTID: 9-14, HJÄLPMEDEL: Beta, formelsamling, fickräknare.. **MOTIVERA** ALLA LÖSNINGAR NOGGRANT.
POÄNGGRÄNSER: 3 18-24p, 4 25-31p, 5 32-40p. Varje uppgift är värd 8p.

1. (a) För vilka reella a är nedanstående differentialekvation stabil?

$$\left(\frac{A}{B}\right) \quad x''(t) + 2a x'(t) + (a^2 - 1)x(t) = u(t)$$

- (b) Lös $\left(\frac{A}{B}\right)$ i det fall att $a = 0$, $u(t) = \theta(t-1) + \delta(t-1)$ och $x(0) = x'(0) = 0$.

LÖSNING

(a) Stabiliteten står och faller med impulssvaret $h(t)$. Närmare bestämt råder stabilitet omm samtliga poler till den s.k. överföringsfunktionen $H(s)$ – Laplacetransformen av $h(t)$ – ligger i vänster halvplan, dvs har negativ realdel.

Laplacetransformerar vi $h''(t) + 2a h'(t) + (a^2 - 1)h(t) = \delta(t)$ där $h(0) = h'(0) = 0$ får vi

$$H(s) s^2 + 2a H(s) s + (a^2 - 1)H(s) = 1,$$

$$\text{och därmed } H(s) = \frac{1}{s^2 + 2as + a^2 - 1} = \frac{1}{(s+a+1)(s+a-1)}.$$

Polerna till $H(s)$ är reella: $s = -1 - a$ och $s = 1 - a$. Så villkoret för stabilitet blir att bägge polerna är negativa, vilket de är omm den största är negativ, dvs omm $a > 1$.

- (b) Laplacetransformerar vi $x''(t) - x(t) = \theta(t-1) + \delta(t-1)$ där $x(0) = x'(0) = 0$ får vi

$$s^2 X(s) - X(s) = \frac{e^{-s}}{s} + e^{-s} \quad (1)$$

Av (1) följer att $X(s) = \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) e^{-s}$

Inverstransformering (med fördröjningsregeln) ger $x(t) = (e^{t-1} - 1)\theta(t-1)$.

2. Bestäm $y(n)$ då $n \geq 2$ i följden $(0, 0, y(2), y(3), \dots)$ givet att $y(n+2) + 2y(n+1) - 3y(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

LÖSNING Vi Z-transformerar och får ...

$$Y(z) z^2 + 2 Y(z) z - 3 Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (2)$$

Av (2) följer att

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 + 2z - 3)} = z \frac{1}{(z-1)^3(z+3)} = \frac{1}{64} \left(\frac{16z}{(z-1)^3} - \frac{4z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+3} \right)$$

Inverstransformering ger till sist

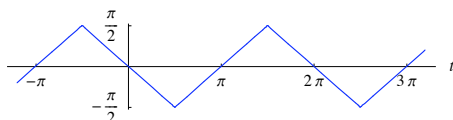
$$y(n) = \frac{1}{64} \left(16 \frac{(n-1)n}{2} - 4n + 1 - (-3)^n \right) = \frac{n^2}{8} - \frac{3n}{16} + \frac{1}{64} - \frac{(-3)^n}{64}$$

Kontroll:

Det är lätt att generera några inledande output med ovanstående formel. Och ännu enklare är det att beräkna några inledande $y(n)$ med hjälp av den givna rekursionsformeln. Man får ...

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(n)$	0	0	0	1	0	6	-8	39
$\frac{n^2}{8} - \frac{3n}{16} + \frac{1}{64} - \frac{(-3)^n}{64}$	0	0	0	1	0	6	-8	39

3. (a) Bestäm fourierserien till den 2π -periodiska funktionen i figuren.
 (b) Beräkna sedan (med hjälp av fourierserien) $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$



LÖSNING

Funktionen är udda, så fourierserien blir en sinusserie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-t) \sin(nt) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t - \pi) \sin(nt) dt \right) =$$

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n^2} - \frac{n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) + 2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n^2} \right) =$$

$$\frac{2}{\pi} \left(-\frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} \right) = \begin{cases} 0, & n \text{ jämn} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \sin(\frac{n\pi}{2}), & n \text{ udda} \end{cases}$$

Fourierserien blir således

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{-4}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nt) =$$

$$-\frac{4 \sin(t)}{\pi} + \frac{4 \sin(3t)}{9\pi} - \frac{4 \sin(5t)}{25\pi} + \frac{4 \sin(7t)}{49\pi} + \dots$$

Serien $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$ kan beräknas genom att evaluera fourierserien i $t = -\frac{\pi}{2}$. Man får ...

$$\frac{\pi}{2} = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{Dirichlet}}{=} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{-4}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$\frac{4}{\pi} + \frac{4}{9\pi} + \frac{4}{25\pi} + \frac{4}{49\pi} + \dots = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right)$$

$$\text{Härav, } \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

4. Beräkna fouriertransformen av

(a) den funktion som är lika med e^t då $t < 0$ och lika med e^{-2t} då $t > 0$.

(b) $\frac{1}{1+4t^2}$ LEDNING: Symmetriregeln $\hat{g}(t) \sim 2\pi g(-w)$.

LÖSNING

$$(a) \int_{-\infty}^0 e^t e^{-iwt} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-iwt} dt =$$

$$\frac{1}{-i w + 1} + \frac{1}{i w + 2} = \frac{3}{w^2 - i w + 2} = \frac{3 w^2 + 6 + 3 i w}{(w^2 + 1)(w^2 + 4)}$$

(b) $e^{-|t|} \sim \frac{2}{1+w^2}$ (Finns i formelsamlingen.)

Av skalningsregeln följer att $e^{-|\frac{t}{2}|} \sim \frac{4}{1+4w^2}$ och därav följer (av lineäritet) att

$$\frac{1}{4} e^{-|\frac{t}{2}|} \sim \frac{1}{1+4w^2}$$

Av symmetriregeln följer till sist att $\frac{1}{1+4t^2} \sim 2\pi \frac{1}{4} e^{-|\frac{-w}{2}|} = \frac{\pi}{2} e^{-|\frac{w}{2}|}$.

5. (a) Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

för en tråd av längd π , dvs $0 < x < \pi$, $t > 0$ givet att

(i) trådens temperatur i begynnelsen ges av $u(x, 0) = 2 \cos^4(x) + \cos^2(x)$,
 $0 < x < \pi$,

(ii) ändpunkterna är isolerade hela tiden, dvs $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0$, $t > 0$.

(b) En tidsberoende värmekälla i tråden förändrar värmeledningsekvationen till

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \cos(x)$$

Lös denna nya ekvation under samma rand- och begynnelsevillkor som i (a).

LÖSNING

(a) Av randvillkoren (ii) leds vi till att för fixt t skriva $u(x, t)$ som en cosinusserie (eller hur!).

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(nx)$$

PDE : n får då utseendet

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(nx) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(nx),$$

$$\text{dvs } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n(t)}{\partial t} \cos(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} (-n^2 a_n(t)) \cos(nx)$$

$$\text{vilket ger upphov till ODE:n } \frac{\partial a_n(t)}{\partial t} = -n^2 a_n(t)$$

$$\text{som löses av } a_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$$

Härav,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos(nx). \quad (3)$$

A_n bestäms av begynnelsevillkoren (i)

$$2 \cos^4(x) + \cos^2(x) \stackrel{(i)}{=} u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx) \quad (4)$$

$$\text{Med hjälp av formlerna } \begin{cases} \cos^2(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \\ \cos^4(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\text{blir } 2 \cos^4(x) + \cos^2(x) = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos(4x)$$

(4) kan alltså skrivas

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos(4x) =$$

$$A_0 + A_1 \cos(x) + A_2 \cos(2x) + A_3 \cos(3x) + A_4 \cos(4x) + \dots$$

$$\text{Härav, } A_0 = \frac{5}{4}, A_2 = \frac{3}{2}, A_4 = \frac{1}{4} \text{ och } A_n = 0 \text{ för övriga } n.$$

Om detta pluggas in i (3) fås

$$u(x, t) = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} e^{-4t} \cos(2x) + \frac{1}{4} e^{-16t} \cos(4x).$$

Kontroll:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -6 e^{-4t} \cos(2x) - 4 e^{-16t} \cos(4x)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -6 e^{-4t} \cos(2x) - 4 e^{-16t} \cos(4x)$$

$$\text{Som synes stämmer det att } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

(b) Eftersom PDE:n nu har en tidsberoende inhomogenitet försöker vi lösa problemet genom att först hitta en tidsberoende partikulärlösning till PDE:n och randvillkoret.

$u_{\text{part}}(x) = \cos(x)$ är en sådan lösning. Tänk själv

efter hur man kan komma på denna partikulärlösning.

Om u löser det inhomogena problemet,

så måste $u_{\text{hom}} = u - u_{\text{part}}$ lösa nedanstående homogena problem :

$$\text{PDE}_{\text{hom}}: \frac{\partial u_{\text{hom}}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_{\text{hom}}(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{Försök själv visa detta!})$$

$$\text{BEG}_{\text{hom}}: u_{\text{hom}}(x, 0) = 2 \cos^4(x) + \cos^2(x) - \cos(x)$$

$$\text{RAND:} \quad \frac{\partial u_{\text{hom}}(0, t)}{\partial x} = 0 - 0 = 0, \quad \frac{\partial u_{\text{hom}}(\pi, t)}{\partial x} = 0 - 0 = 0.$$

Detta problem är nästan ordagrant samma problem som i (a). Enda skillnaden är en extra term i begynnelsevillkoret. Därför blir u_{hom} nästan identisk med lösningen i (a). Man får

$$u_{\text{hom}}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos(nx)$$

där A_n bestäms av $\text{BEG}_{\text{hom}} \dots$

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos(4x) - \cos(x) \quad \uparrow \\ \text{BEG}_{\text{hom}}$$

$$l_0 + A_1 \cos(x) + A_2 \cos(2x) + A_3 \cos(3x) + A_4 \cos(4x) + \dots$$

$$\text{Dvs } A_0 = \frac{5}{4}, A_1 = -1, A_2 = \frac{3}{2}, A_4 = \frac{1}{4} \text{ och } A_n = 0 \text{ för övriga } n.$$

$$\text{Så } u_{\text{hom}}(x, t) = \frac{5}{4} - 1 e^{-t} \cos(x) + \frac{3}{2} e^{-4t} \cos(2x) + \frac{1}{4} e^{-16t} \cos(4x).$$

Härav,

$$u(x, t) = u(x, t) + u_{\text{part}}(x) =$$

$$\frac{5}{4} - 1 e^{-t} \cos(x) + \frac{3}{2} e^{-4t} \cos(2x) + \frac{1}{4} e^{-16t} \cos(4x) + \cos(x)$$

$$\text{Dvs, } u(x, t) = \frac{5}{4} + (1 - e^{-t}) \cos(x) + \frac{3}{2} e^{-4t} \cos(2x) + \frac{1}{4} e^{-16t} \cos(4x)$$

Kontroll:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = e^{-t} \cos(x) - 6 e^{-4t} \cos(2x) - 4 e^{-16t} \cos(4x)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \cos(x) =$$

$$-(1 - e^{-t}) \cos(x) - 6 e^{-4t} \cos(2x) - 4 e^{-16t} \cos(4x) + \cos(x)$$

$$\text{Som synes stämmer det att } \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \cos(x).$$